

# Animação de um Modelo Estocástico de Crescimento por Agregação sob Confinamento

MARIO E. MOLINA<sup>1</sup>  
ALEJANDRO C. FRERY<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Facultad de Ingeniería  
Universidad de Mendoza  
Diagonal Dag Hammarskjöld 750  
5500 Mendoza  
Argentina

<sup>2</sup> Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais – INPE  
Divisão de Processamento de Imagens – DPI  
Avenida dos Astronautas, 1758  
12227-010 São José dos Campos, SP  
Brasil  
frery@dpi.inpe.br

**Abstract.** A PC-based implementation of a Diffusion Limited Aggregation (DLA) Model is presented, with emphasis in the animation of the process. The seed of the process is taken as the origin, and two new confinement restrictions are considered: circular and squared boxes.

**Key Words:** animation, diffusion, fractals, growth, simulation, stochastic processes.

## 1 Introdução

A simulação de processos estocásticos complexos é um assunto de interesse para várias áreas. Por exemplo, os físicos tiram proveito destas simulações para inferir ou verificar propriedades de sistemas de infinitas partículas; em processamento de imagens, a simulação pode vir a ser uma ferramenta para a restauração e segmentação de imagens.

A partir do trabalho de Mandelbrot (1983) o interesse pela modelagem de processos que imitam fenômenos naturais tem crescido explosivamente. Os fractais permitem modelar com bastante flexibilidade um fato evidente da observação da natureza: a grande maioria dos objetos naturais apresenta, por um lado, uma certa regularidade e, por outro, uma enorme diversidade. A matemática clássica não forneceu ferramentas tão aptas para o estudo de, por exemplo, a forma das nuvens quanto os fractais.

O uso destes modelos permite, também, a classificação de um objeto natural dentro uma certa classe, pelo uso de estimativas da dimensão fractal. Isto tem gerado ferramentas que visam aplicações a áreas tão diferentes quanto química [Sawada-Hyosu, 1989], sensoriamento remoto [Leguizamón, 1991] e medicina [Ferydoon et al., 1989].

Neste trabalho apresenta-se a animação de um processo estocástico cujas ocorrências apresentam

características fractais: o *DLA*, modelo de crescimento por difusão limitada (*Diffusion Limited Aggregation*). Variações deste modelo têm aparecido na literatura para a modelagem de objetos naturais, e é capaz de gerar, com bastante expressividade, figuras muito parecidas com corais, descargas elétricas, a estrutura de irrigação sanguínea da retina, etc.

O modelo originalmente proposto consiste de uma partícula gerada a uma distância arbitrariamente grande da origem do plano que, animada de um movimento Browniano, eventualmente alcança a origem. Uma vez acontecido isto, a partícula passa a ser o conjunto de acréscimo. Uma a uma, mais partículas são geradas e animadas do mesmo movimento, até serem absorvidas pelo conjunto de acréscimo que, por sua vez, vai crescendo até alcançar um determinado tamanho (daí o nome de *limitado*): observa-se, assim, um crescimento *de dentro para fora*.

Considera-se neste artigo uma variação desse modelo: as partículas são geradas na origem, e o conjunto de acréscimo (ou de absorção) é uma fronteira ou quadrada ou circular. O critério de parada é também redefinido, de modo a se obter um crescimento *de fora para dentro*. Apresentam-se resultados onde é possível verificar que este processo gera eventos parecidos com o crescimento de plantas dentro

de encanamentos, depósitos de gordura em artérias, etc.

Emprega-se a aproximação usual: em vez do movimento Browniano sobre o plano real, considera-se uma passeio aleatório simples sobre o produto cartesiano dos inteiros vezes os inteiros. Sabe-se (ver, por exemplo, [Chung (1974)]) que essa aproximação é boa pois, no limite, esse passeio aleatorio simples é equivalente ao movimento Browniano.

### 2 Notação e Definições

Denota-se a grade bidimensional dos números inteiros como  $\mathbf{Z}^2$ , e supõe-se definida a operação de soma sobre elementos desse conjunto. A vizinhança-4 de um elemento  $s = (s_1, s_2)$  qualquer de  $\mathbf{Z}^2$  será denotada  $\partial_s$ , é definida por  $\partial_s = \{t \in \mathbf{Z}^2: |s_1 - t_1| + |s_2 - t_2| = 1\}$ , e ilustrada na Figura 1. A distância

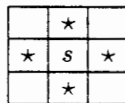


Figura 1: Vizinhança-4 (denotada “\*”) de um ponto de  $\mathbf{Z}^2$  (denotado “s”).

do ponto  $s$  à origem será denotada  $\delta(s) = \sqrt{s_1^2 + s_2^2}$ . Define-se, ainda, a distância do conjunto  $A$  à origem como  $\delta(A) = \min\{\delta(a): a \in A\}$ .

Considera-se sempre o processo definido sobre um subconjunto finito de  $\mathbf{Z}^2$ . Este subconjunto poderá ser circular ( $C$ ) ou quadrado ( $Q$ ), de tamanho  $k \geq 2$ :

$$\Gamma_C^{(k)} = \{s \in \mathbf{Z}^2: \delta(s) \leq k\} \text{ ou}$$

$$\Gamma_Q^{(k)} = \{-k, \dots, 0, \dots, k\} \times \{-k, \dots, 0, \dots, k\},$$

respectivamente.

O interior desses conjuntos será

$$\overset{\circ}{\Gamma}_\bullet^{(k)} = \{s \in \Gamma_\bullet^{(k)}: \partial_s \cap \Gamma_\bullet^{(k)} = 4\};$$

a partir do qual podemos definir a fronteira de ambos como

$$\partial_{\Gamma_\bullet^{(k)}} = \Gamma_\bullet^{(k)} \setminus \overset{\circ}{\Gamma}_\bullet^{(k)},$$

onde “ $\bullet$ ” denota  $C$  ou  $Q$ .

### 3 O Algoritmo

Definidos  $\Gamma_\bullet^{(k)}$ ,  $\partial_{\Gamma_\bullet^{(k)}}$  e  $\overset{\circ}{\Gamma}_\bullet^{(k)}$ , o critério de parada do algoritmo será quando o conjunto de absorção atingir um determinado tamanho  $r$ . Define-se ainda a semente ou ponto de geração  $p = (0, 0)$ .

O algoritmo descrito em palavras é o seguinte: definido o conjunto absorvente (a fronteira), cria-se uma partícula na semente. Essa partícula percorrerá um passeio aleatório simples, até alcançar uma posição distante de uma unidade do conjunto absorvente. Nesse instante, ela é absorvida pelo conjunto, e o conjunto absorvente passa a incluir a posição da partícula absorvida. Uma nova partícula é então criada na semente, e o procedimento se repete até o conjunto absorvente crescer e atingir uma distância predeterminada (o critério de parada, dado pelo valor  $r$ ).

A descrição em pseudolinguagem é a seguinte, onde os passos do passeio aleatório são obtidos a partir de uma variável aleatória com distribuição Uniforme no intervalo  $(0, 1)$ , denotada  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ :

1. Atribuir  $t \leftarrow 0$ ,  $A(t) \leftarrow \partial_{\Gamma_\bullet^{(k)}}$
2. Enquanto  $\delta(A(t)) > r$  fazer
  - (a) Atribuir  $p = (0, 0)$
  - (b) Enquanto  $\partial_p \cap A(t) = \emptyset$  fazer
    - i. Atribuir  $u \leftarrow U \sim \mathcal{U}(0, 1)$
    - ii. Atribuir  $\ell \leftarrow (0, 1)$  se  $u < \frac{1}{4}$
    - iii. Atribuir  $\ell \leftarrow (1, 0)$  se  $\frac{1}{4} \leq u < \frac{1}{2}$
    - iv. Atribuir  $\ell \leftarrow (0, -1)$  se  $\frac{1}{2} \leq u < \frac{3}{4}$
    - v. Atribuir  $\ell \leftarrow (-1, 0)$  se  $u \geq \frac{3}{4}$
    - vi. Atribuir  $p \leftarrow p + \ell$
  - (c) Atribuir  $A(t+1) \leftarrow A(t) + p$
  - (d) Atribuir  $t \leftarrow t + 1$
3. Fim

### 4 Implementação e Resultados

A linguagem de programação/compiler escolhidos para esta fase do trabalho foram o ambiente Turbo Pascal, devido a suas interfaces gráficas simples [Hogan, 1985]. Os diagramas de fluxos estruturados podem ser vistos em [Molina, 1992], junto com as listagens completas e um programa executável.

O programa principal divide a tela em duas partes (superior e inferior) e cada uma delas em dois setores:

**Modelo:** Definem-se aqui os parâmetros que caracterizam  $\Gamma_\bullet^{(k)}$  e  $r$ ; depois permite a entrada de comandos para visualização.

**Zoom:** Amplia uma área de interesse, previamente escolhida com o auxílio de uma grade.

**Parâmetros-Comandos:** Entrada de dados e controle geral da apresentação.

**Estatísticas:** Apresenta informações do gerador de números pseudoaleatórios, número de partículas geradas e distância da última partícula absorvida à origem.

O sistema oferece a opção de apresentar estatísticas, que são atualizadas toda vez que uma partícula é absorvida (e, portanto, consomem algum tempo de execução). A trajetória descrita por cada partícula, desde a sua geração até a sua absorção, pode ser:

- apagada após a absorção;
- mantida com a mesma cor;
- mantida, porém trocando de cor entre trajetórias consecutivas.

Estas opções são úteis para a visualização do comportamento da trajetória de partículas animadas de movimento Browniano sob a influência de fronteiras absorventes. Ativando a segunda é possível ver o aparecimento de regiões de *exclusão* onde, após um certo tempo, é extremamente pouco provável ver a passagem de uma partícula (perto das esquinas de  $\Gamma_Q^{(k)}$ , por exemplo).

Nas Figuras 2, 3 e 4 mostra-se a formação de um evento do processo  $\Gamma_C^{(80)}$ ,  $r = 5$ , e nas Figuras 5 e 6 mostra-se a formação de um evento do processo  $\Gamma_Q^{(80)}$ ,  $r = 5$ .

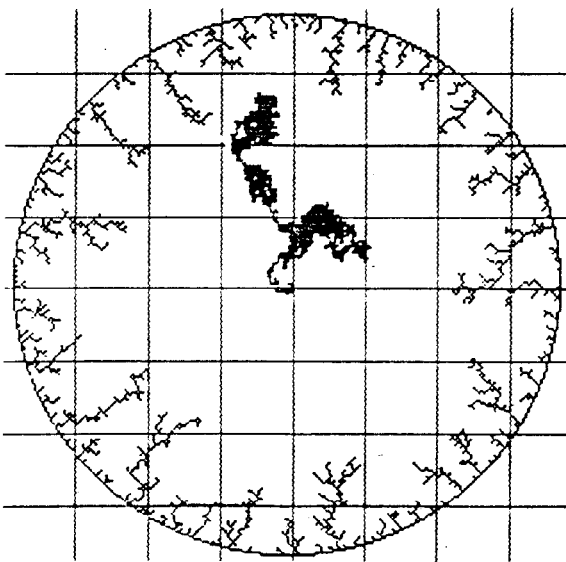


Figura 2: Evento de fronteira circular, em formação, com a última trajetória marcada e grade do zoom.

## 5 Extensões

Futuramente serão considerados outros tipos de suporte, de semente e de critérios de parada, bem como

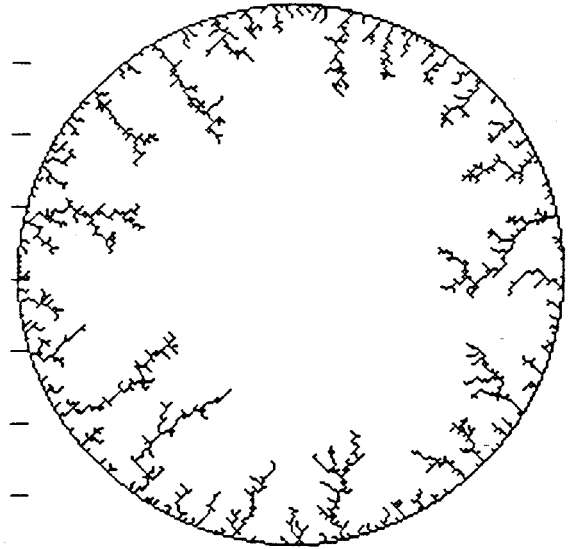


Figura 3: Evento de fronteira circular, em formação.

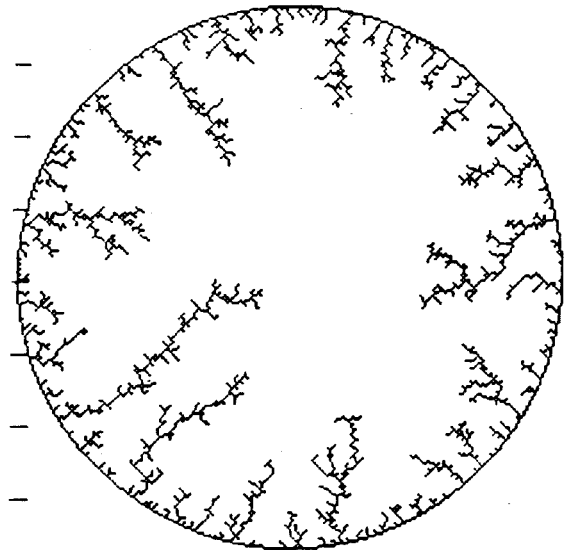


Figura 4: Evento de fronteira circular finalizado.

passaios aleatórios com *drift* (isto é, quando a probabilidade da partícula se dirigir a uma quatro posições adjacentes não é identicamente de  $\frac{1}{4}$ ).

Pretende-se incorporar várias ferramentas estatísticas funcionando *on line* com a animação: histograma dos tamanhos dos ramos, figuras de forma e dimensão fractal, etc. para o qual estão sendo estudadas as estruturas de dados mais adequadas para a implementação.

Já está sendo montado o ambiente estendido usando a linguagem de programação C++ que, futuramente, permitirá não somente a geração de eventos por simulação, como também a leitura e análise de eventos reais.

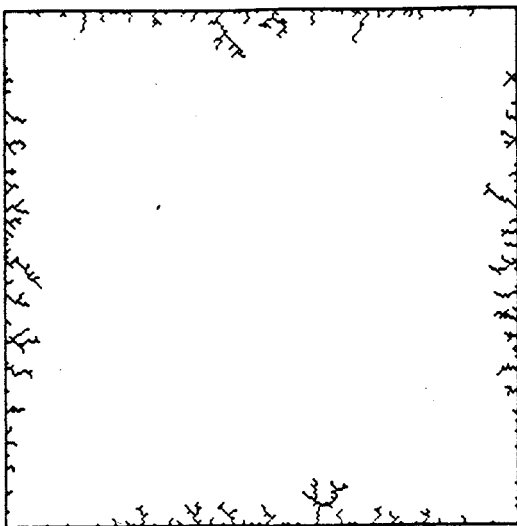


Figura 5: Evento de fronteira quadrada, em formação.

## 6 Agradecimentos

Este trabalho foi parcialmente desenvolvido com recursos do Projeto Temático de Equipe No. 91/3532-2 da Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). Os autores ficam gratos ao apoio permanente da Profa. Maria Eulália Vares (IMPA, Rio de Janeiro).

## 7 Referências

- Chung, K. *A course in probability theory*. 2. ed. New York, Academic Press, 1974.
- Fereydoon, F.; Masters, B.R.; Platt, D.E. Fractal information in human retinal vessels. *Physica D*, **38**,(1-3):98-103, 1989.
- Hogan, T. Using decision variables in graphics primitives. *Dr. Doob's Journal*, **10**(5):40-48, 1985.
- Leguizamón, S. Estimación de la dimensión fractal en imágenes. Jornadas Internacionales de Uso de Computadoras en Actividades Científicas y Tecnológicas, 2., Mendoza, Argentina, 1991. Mendoza, EDIUM, 1991.
- Mandelbrot, B. *The fractal geometry of nature*. New York, W. H. Freeman and Company, 1983.
- Molina, M.E. Modelos estocásticos de crecimiento por agregación. (Trabalho de Graduação) – Universidad de Mendoza, 1992.
- Sawada, Y; Hyosu, H. Growth velocity of electrochemical deposition and its concentration dependence. *Physica D*, **38**,(1-3):299-303, 1989.

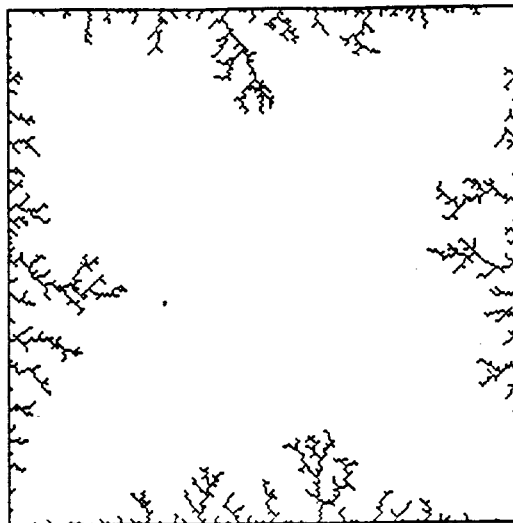


Figura 6: Evento de fronteira quadrada, em formação.

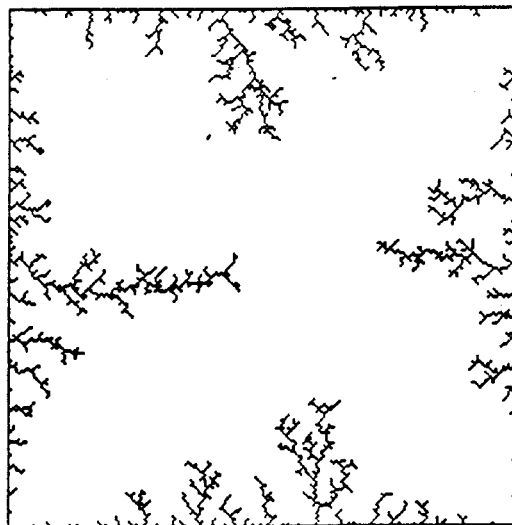


Figura 7: Evento de fronteira quadrada finalizado.